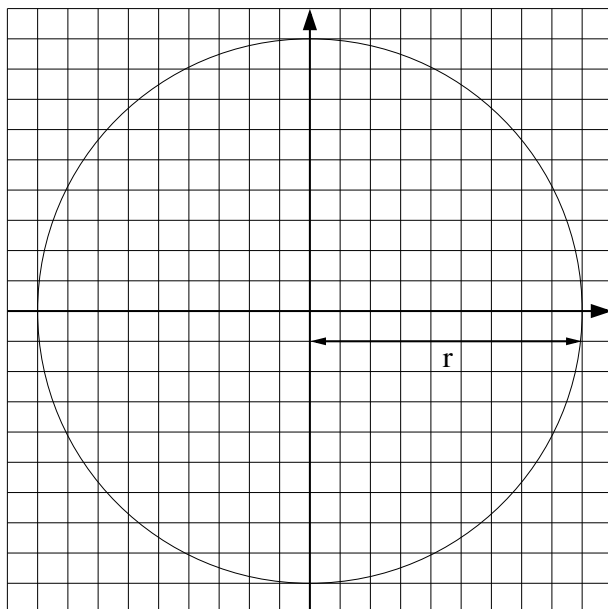


Berechnung von Pi und verwandte Probleme

1. GITTERPUNKTE IM KREIS

1.1. **Näherungsformel.** Wir wollen eine möglichst einfache näherungsweise Formel finden für die Anzahl der Gitterpunkte in einem Kreis um $(0,0)$ mit Radius $r > 0$.



Sei

$$g(r) := |\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}|$$

diese Anzahl. Betrachten Sie alle Gitterquadrate, deren linke untere Ecke im Kreis liegt, und vergleichen Sie deren Anzahl mit dem Flächeninhalt des Kreises. Welche Näherungsformel

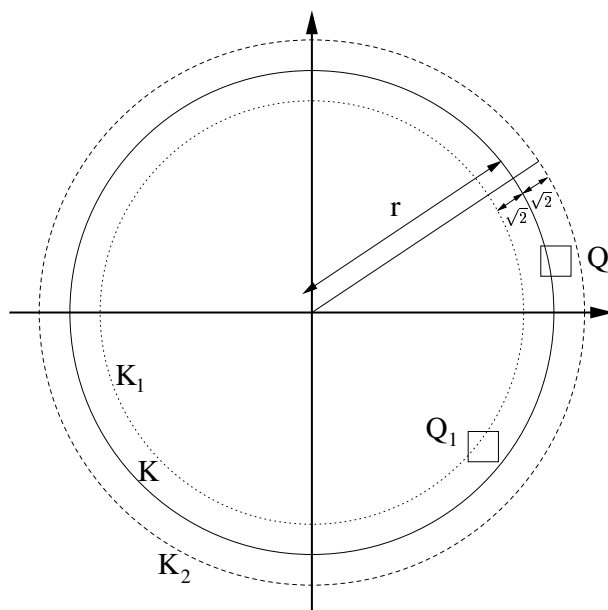
$$g(r) \approx$$

ergibt sich? Welche Näherungsformel für π erhält man daraus?

1.2. **Experiment.** Zeichnen Sie auf Karopapier einen Kreis mit 20 Kästchenbreiten als Radius und bestimmen Sie $g(20)$ durch Zählen. Welche Näherung für π ergibt sich?

1.3. **Genauigkeit.** Wir können nicht mit Bestimmtheit sagen, wie gut unser Näherungswert für π ist. Aber wir können angeben, wie groß der Fehler höchstens ist (*Fehlerabschätzung*).

1.3.1. Betrachten Sie die Kreise K_1 , K und K_2 um $(0,0)$ mit den Radien $r - \sqrt{2}$, r und $r + \sqrt{2}$.



Zeigen Sie:

- Jedes Gitterquadrat Q_1 , das K_1 schneidet, liegt ganz in K .
- Jedes Gitterquadrat Q , dessen linke untere Ecke in K liegt, liegt ganz in K_2 .

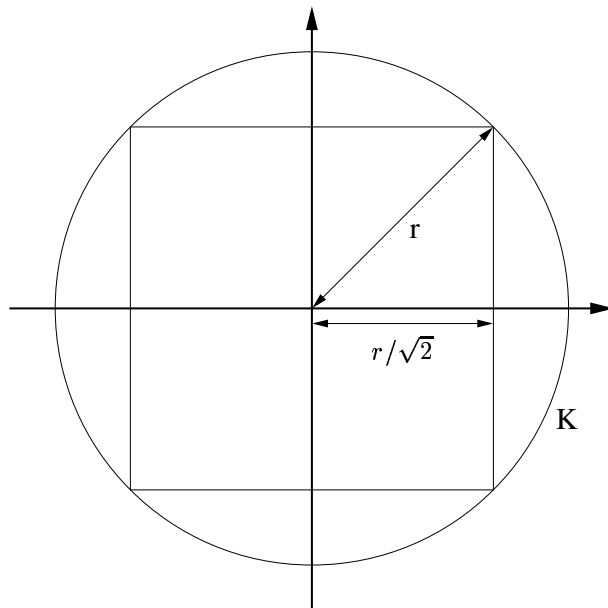
1.3.2. Folgern Sie daraus für die Flächeninhalte der Kreise

$$A(K_1) \leq g(r) \leq A(K_2).$$

1.3.3. Geben Sie Formeln an für $A(K_1)$ und $A(K_2)$. Wie groß kann $|g(r) - \pi r^2|$ höchstens werden? Welche Fehlerabschätzung für die Berechnung von π ergibt sich daraus?

1.3.4. Geben Sie für $r = 20$ eine Abschätzung des Fehlers bei der Berechnung von π an.

1.4. **Exakte Formeln für $g(r)$.** Die graphische Bestimmung von $g(r)$ ist für großen Radius r mühsam und fehleranfällig. Ausserdem können wir sie nicht durch einen Computer durchführen lassen. Wir wollen deshalb eine exakte Formel herleiten.



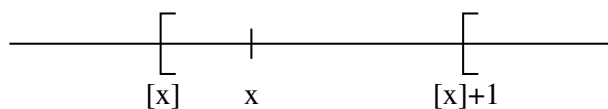
Dazu teilen wir den Kreis K um $(0,0)$ mit Radius $r \in \mathbb{N}$ auf in die Teilmengen

- $A = \{(0,0)\}$,
- $B =$ Schnitt von K mit den Achsen ohne $(0,0)$,
- $C_1, C_2, C_3, C_4 =$ Achsenparallele Quadrate mit einer Ecke bei $(0,0)$ und Kantenlänge $r/\sqrt{2}$,
- $D =$ Rest.

1.4.1. Geben Sie exakte Formeln an für die Anzahl der Gitterpunkte in A, B und den Mengen C_i . Dabei ist die Gauß-Klammer

$$[x] = \text{größte ganze Zahl } \leq x$$

nützlich:



Es gilt also z.B. $[2.5] = 2$, $[-3] = -3$, $[-0.5] = -1$.

1.4.2. Für die Anzahl g^* der Gitterpunkte in D gibt es keine geschlossene Formel. Aber immerhin gilt

$$g^*/8 = \left[\sqrt{r^2 - a^2} \right] + \left[\sqrt{r^2 - (a+1)^2} \right] + \dots + \left[\sqrt{r^2 - (r-1)^2} \right] \text{ mit } a = \left[\frac{r}{\sqrt{2}} \right] + 1.$$

Warum?

1.4.3. Berechnen Sie $g(20)$ mit diesen Formeln.

1.5. Das folgende Computerprogramm berechnet die Näherung $g(r)/r^2$ bei Eingabe von $r \in \mathbb{N}$:

```

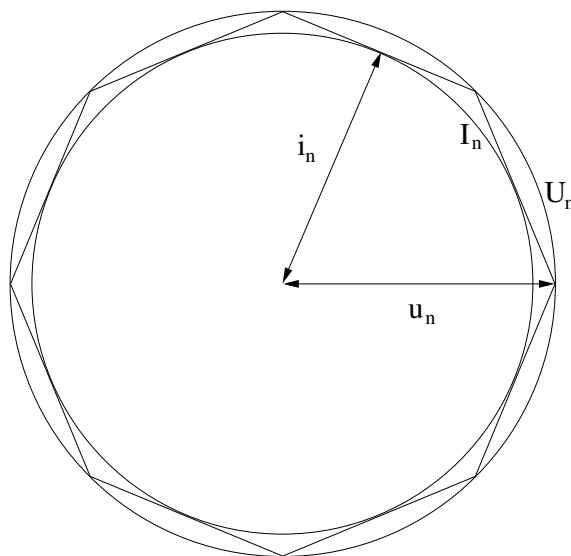
INPUT r
g = 0
FOR a = int(r/sqrt(2))+1 TO r - 1
  g = g+int(sqrt(r^2-a^2))
NEXT a
g = 1+4*r+4*int(r/sqrt(2))^2+8*g
g = g/r^2
OUTPUT g

```

Programmieren Sie es auf einem Taschenrechner oder Computer und lassen Sie für die Werte $r = 20, 21, 22, \dots$ die Näherungen an π berechnen. Vergleichen Sie die Werte mit dem exakten Wert von π . Wie groß ist dieser tatsächliche Fehler im Vergleich zu den theoretischen Abschätzungen aus Abschnitt 1.3.3?

2. APPROXIMATION DURCH REGELMÄSSIGE VIELECKE

2.1. **Ansatz.** Wir wollen ein Verfahren herleiten, das die geometrische Definition von π verwendet. Dazu betrachten wir ein regelmäßiges 2^n -Eck mit Umfang 2 und Inkreis I_n und Umkreis U_n .

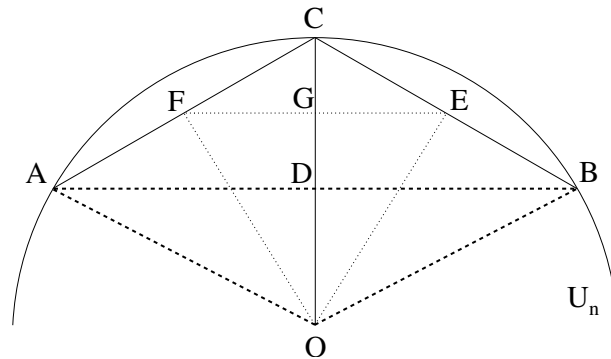


Der Inkreis habe den Radius i_n und der Umkreis den Radius u_n . Wir wollen, ausgehend vom Quadrat, nacheinander die Radien $i_2, u_2, i_3, u_3, \dots$ aus den jeweils vorhergehenden Werten berechnen (*Rekursionsformeln*). Daraus sollen dann Näherungen für π berechnet werden.

2.2. **Abschätzung.** Schachteln Sie den Umfang des 2^n -Ecks nach oben und unten mit Hilfe von i_n und u_n ein.

2.3. **Startwerte.** Berechnen Sie i_2 und u_2 .

2.4. **Hilfsbetrachtung.** In der Figur sei $\triangle AOB$ ein Sektor des 2^n -Ecks.



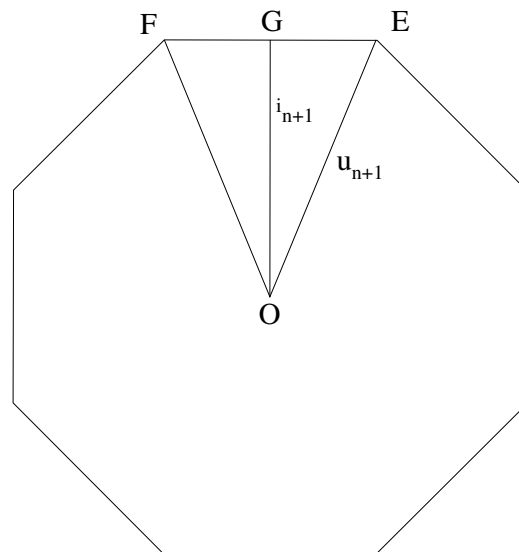
Der Punkt C sei Mittelpunkt des Bogens von U_n zwischen A und B und D, E, F seien die Mittelpunkte der Strecken AB, BC und CA .

2.4.1. Berechnen Sie die Länge \overline{AB} der Strecke AB .

2.4.2. Berechnen Sie mit dem Strahlensatz die Länge \overline{EF} .

2.4.3. Zeigen Sie $\angle EOF = \frac{1}{2}\angle BOA$.

2.4.4. Begründen Sie mit Hilfe eines Kongruenzsatzes, daß $\triangle OEF$ ein Sektor des 2^{n+1} -Ecks ist.



Also ist

$$\overline{OC} = u_n, \quad \overline{OD} = i_n, \quad \overline{OE} = u_{n+1}, \quad \overline{OG} = i_{n+1}.$$

2.5. **Rekursionsformeln.** Jetzt sollen i_{n+1} und u_{n+1} aus i_n und u_n berechnet werden.

2.5.1. Warum ist G der Mittelpunkt der Strecke CD ?

2.5.2. Berechnen Sie damit i_{n+1} aus i_n und u_n .

2.5.3. Warum sind $\triangle OEC$ und $\triangle OEG$ ähnlich?

2.5.4. Berechnen Sie damit u_{n+1} aus i_{n+1} und u_n .

2.6. **Approximation.** Begründen Sie, warum das folgende Computerprogramm bei Eingabe von $N \in \mathbb{N}$ die N -ten Näherungen an π berechnet:

```

INPUT N
i = 1/4
u = sqrt(2)/4
FOR n = 2 TO N - 1
  i = (i+u)/2
  u = sqrt(i*u)
NEXT n
OUTPUT 1/u , 1/i

```

2.7. **Experiment.** Berechnen Sie die 6-te Näherung an π auf dem Taschenrechner. Geben Sie eine Abschätzung des Fehlers an, ohne den Wert von π zu benutzen.

2.8. **Fehlerabschätzung.** Natürlich kann man für jedes n die Werte von $1/u_n$ und $1/i_n$ berechnen und ihre Differenz zur Fehlerabschätzung verwenden. Aber wir würden gerne im Voraus wissen, wie groß n zu wählen ist, um eine geforderte Genauigkeit zu erhalten.

2.8.1. Zeigen Sie mit den Rekursionsformeln, daß

$$u_{n+1}^2 - i_{n+1}^2 = \frac{1}{2}i_{n+1}(u_n - i_n)$$

gilt.

2.8.2. Faktorisieren Sie die linke Seite und schätzen Sie einen Faktor nach unten durch $2i_{n+1}$ ab.

2.8.3. Folgern Sie daraus

$$0 \leq u_{n+1} - i_{n+1} \leq \frac{1}{4}(u_n - i_n).$$

2.8.4. Zeigen Sie

$$0 \leq u_n - i_n \leq \frac{1}{4^{n-2}}(u_2 - i_2).$$

2.8.5. Warum gilt für die Fehlerschranke $\delta_n = 1/i_n - 1/u_n$ die Abschätzung

$$0 \leq \delta_n \leq \frac{1}{4^{n-2}} \frac{u_2 - i_2}{i_2^2} \leq \frac{27}{\cdot 4^n}?$$

2.9. **Experiment.** Wie groß braucht man n höchstens zu wählen, um eine Genauigkeit von 10^{-16} zu erhalten?

3. INTERNET-ADRESSEN ZUM THEMA π

- (1) <http://web.mathematik.uni-freiburg.de/mi/zahlen/home/peter/>
- (2) <http://escape.com/~paulg53/math/pi/greg/index.html>
- (3) http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/HistTopics/Pi_chronology.html
- (4) http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/HistTopics/Pi_through_the_ages.html
- (5) http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/HistTopics/Squaring_the_circle.html
- (6) <http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibpi.html>